Abzählbar-primitive Ultrafilter II

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 44, 1993,
S.7-28

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Abzählbar-primitive Ultrafilter II

Herrn Professor em. Dr. *Hans-Joachim Kanold*
zum achtzigsten Geburtstag

Von **Hans-Joachim Kowalsky***, Braunschweig

(Eingegangen am 10. 08. 1993)

Einleitung

Im ersten Teil dieser Untersuchungen (Abhandlungen der BWG, Band XLIII, 1992, pp. 13–33), der weiterhin mit „(I)“ zitiert wird, wurde in der Menge aller Ultrafilter einer festen abzählbaren Grundmenge X eine Präordnung $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ durch die Existenz einer Abbildung $\varphi: X \to X$ mit $\varphi\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ definiert. Hinsichtlich dieser Präordnung wurden dann Ultrafilterklassen H_n ($n \in \mathbb{N}$) konstruiert: H_0 ist die Klasse aller gebundenen Ultrafilter, und H_1 besteht aus den primitiven Ultrafiltern, die hinsichtlich der Präordnung obere Nachbarn der gebundenen Ultrafilter sind. Schließlich entstehen die Ultrafilter aus H_{n+1} mit Hilfe von Ultrafiltern aus H_n durch einen kombinierten Durchschnitts- und Vereinigungsprozeß unter Verwendung abzählbar vieler primitiver Ultrafilter.

In diesem zweiten Teil liegt das Hauptgewicht auf Fortsetzungsmöglichkeiten für die Folge $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu Ultrafilterklassen H_β mit Ordinalzahlenindizes $\beta \geq \omega$, wobei Limeszahl- und speziell Anfangszahl-Indizes ein besonderes Interesse gilt. Im ersten Abschnitt werden für Ultrafilterfolgen $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathfrak{v}_n \in H_n$ mittels Ultrafiltern $\mathfrak{u}^*$ in der Indexmenge $\mathbb{N}$ und mit Hilfe des üblichen Prozesses neue Ultrafilter konstruiert, die sich als obere Schranken der Folge $(\mathfrak{v}_n)$ erweisen. Ihr gegenseitiges Verhältnis in Abhängigkeit von $\mathfrak{u}^*$ wird näher untersucht und speziell ein modifiziertes Isotonieverhalten bewiesen. Für die Definition einer Limesklasse H_ω wäre jedoch die Konstruktion eines Supremums der Folge $(\mathfrak{v}_n)$ wünschenswert. Wesentlicher Inhalt des zweiten Abschnitts ist aber im Gegenteil der Nachweis, daß derartige Suprema nicht existieren. Im dritten Abschnitt muß daher H_ω mit Hilfe oberer Schranken von Folgen $(\mathfrak{v}_n)$ definiert werden, wobei dann H_ω im Sinn der Präordnung in Teilklassen $H_{\omega,n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ zerfällt. Und entsprechende Schritte führen zu Klassen H_β mit $\beta > \omega$, deren Struktur jedoch mit wachsendem Index rasch kompliziert wird. Die Indizes β der Klassen bleiben bei diesem Vorgehen aber auf abzählbare Ordinalzahlen beschränkt. Der abschließende vierte Abschnitt beschäftigt sich daher zunächst mit der Frage, ob man in ähnlicher Weise auch eine Klasse H_η gewinnen kann, wobei η die erste überabzählbare Ordinalzahl ist. Es zeigt sich, daß Ultrafilterfolgen $(\mathfrak{v}_\beta)_{\beta < \eta}$ mit $\mathfrak{v}_\beta \in H_\beta$ im Sinn der bisherigen Präordnung keine oberen Schranken besitzen können, daß aber der entsprechend modifizierte Gewinnungsprozeß bei abgeänderter Präordnung zu oberen Schranken führt, indem man Punktabbildungen

* Prof. em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berge 20 · 38302 Wolfenbüttel

durch geeignete Filterabbildungen ersetzt. Hierbei wird auf die Arbeit „Filterabbildungen" (Abhandlungen der BWG, Band XLII, 1990/91, pp. 7–26) zurückgegriffen, die mit „(FA)" zitiert wird. Die Arbeit schließt mit einer Charakterisierung derjenigen Filter von η (aufgefaßt als Menge der Ordinalzahlen $< \eta$), die bei dem benutzten Bildungsprozeß dieselbe obere Schranke liefern.

1. Obere Schranken von Ultrafilterfolgen

Die Untersuchungen dieses und der folgenden beiden Abschnitte beziehen sich stets auf eine Folge $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus freien Ultrafiltern von X, die im Sinn der Präordnung $\blacktriangleleft$ echt steigend ist. zu jedem Index $n \in \mathbb{N}$ soll es also eine Abbildung φ_n: $X \to X$ mit $\varphi_n \mathfrak{v}_{n+1} = \mathfrak{v}_n$ geben, die auf $\mathfrak{v}_{n+1}$ nicht injektiv ist. Derartige Abbildungen sind zwar nicht eindeutig bestimmt, sie sollen jedoch hier fest gewählt sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man sie jedoch als surjektive Abbildungen voraussetzen: Ist nämlich φ_n zunächst nicht surjektiv, so wähle man eine Menge $V_{n+1} \in \mathfrak{v}_{n+1}$ mit abzählbar unendlichem Komplement $X \setminus V_{n+1}$ fest aus. Dann gibt es jedenfalls eine surjektive Abbildung φ'_n: $X \setminus V_{n+1} \to X \setminus (\varphi_n V_{n+1})$, und durch

$$\varphi^*_n\, x = \begin{cases} \varphi_n x & \text{für } x \in V_{n+1} \\ \varphi'_n x & \phantom{\text{für }} x \in X \setminus V_{n+1} \end{cases}$$

wird dann eine ebenfalls surjektive Abbildung φ^*_n: $X \to X$ mit $\varphi^*_n\, \mathfrak{v}_{n+1} = \mathfrak{v}_n$ definiert. Ziel ist die Bestimmung oberer Schranken der Folge $(\mathfrak{v}_n)$, also von Ultrafiltern $\mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{v}_n \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß es dann Abbildungen ψ_n: $X \to X$ mit $\psi_n \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n$ gibt. Hierbei kann sogar vorausgesetzt werden, daß die Ultrafilter $\mathfrak{v}_n$ der Folge ein disjunktes System bilden. Es sei nämlich $\{Z_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine Zerlegung von X in unendliche Mengen, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei η_n: $X \to Z_n$ eine Bijektion. Dann bilden die Filter $\mathfrak{v}'_n = \eta_n \mathfrak{v}_n$ ein disjunktes System mit $Z_n \in \mathfrak{v}'_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Für die durch $\varphi'_n = \eta_n \circ \varphi_n \circ \eta^{-1}_{n+1}$ definierten Abbildungen φ'_n: $Z_{n+1} \to Z_n$, die noch zu surjektiven Abbildungen $X \to X$ erweitert werden können, gilt $\varphi'_n \mathfrak{v}'_{n+1} = \mathfrak{v}'_n$ und für die Abbildungen $\psi'_n = \eta_n \circ \psi_n$ entsprechend $\psi'_n \mathfrak{w} = \mathfrak{v}'_n$. Umgekehrt kann man aus der Folge $(\mathfrak{v}'_n)$ und den Abbildungen φ'_n, ψ'_n wieder die Folge $(\mathfrak{v}_n)$ und die Abbildungen φ_n, ψ_n zurückgewinnen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann daher weiterhin von der folgenden Voraussetzung ausgegangen werden.

(*) $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ist eine Folge freier Ultrafilter von* X, *die ein disjunktes System bildet.* $\{Z_n: n \in \mathbb{N}\}$ *sei eine zugehörige Zerlegung von* X *mit* $Z_n \in \mathfrak{v}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Für jeden Index* n *sei schließlich* φ_n: $X \to X$ *eine surjektive Abbildung mit* $\varphi_n \mathfrak{v}_{n+1} = \mathfrak{v}_n$, *die auf* $\mathfrak{v}_{n+1}$ *nicht injektiv ist.*

Definition: *Für einen beliebigen Ultrafilter* $\mathfrak{u}^*$ *von* $\mathbb{N}$ *sei*

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \; \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_n \,.$$

1.1 *Wenn* $\mathfrak{u}^*$ *ein freier Ultrafilter von* $\mathbb{N}$ *ist, dann ist* $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ *ein Ultrafilter von* X, *der* $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} \leq \bigvee_{n \geq m} \mathfrak{v}_n$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$ *erfüllt. Umgekehrt sei* $\mathfrak{w}$ *ein Ultrafilter von* X *mit* $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \geq m} \mathfrak{v}_n$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es genau einen freien Ultrafilter* $\mathfrak{u}^*$ *von* $\mathbb{N}$ *mit* $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$.

Wenn alle Ultrafilter $\mathfrak{v}_n$ *abzählbar primitiv sind, ist auch* $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ *abzählbar primitiv.*

Beweis: Jedenfalls ist $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ ein Ultrafilter von X (I, Satz 1.2). Da $\mathfrak{u}^*$ als freier Ultrafilter vorausgesetzt ist, gibt es zu gegebenem $m \in \mathbb{N}$ eine Filtermenge $U^* \in \mathfrak{u}^*$ mit $U^* \subset \{n: n \geq m\}$. Es folgt

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} \leq \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_n \leq \bigvee_{n \geq m} \mathfrak{v}_n .$$

Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \geq m} \mathfrak{v}_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt. Für jede Filtermenge $W \in \mathfrak{w}$ sei dann

$$U^*_W = \{n: W \in \mathfrak{v}_n\}.$$

Wegen $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \geq o} \mathfrak{v}_n$ gilt $U^*_W \neq \emptyset$. Außerdem erhält man für $W_1, W_2 \in \mathfrak{w}$

$$U^*_{W_1} \cap U^*_{W_2} = \{n: W_1 \in \mathfrak{v}_n \wedge W_2 \in \mathfrak{v}_n\} = \{n: W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{v}_n\} = U^*_{W_1 \cap W_2}.$$

Daher ist $\{U^*_W: W \in \mathfrak{w}\}$ Basis eines Filters $\mathfrak{u}^* \neq \mathfrak{o}$ von $\mathbb{N}$. Zum Nachweis, daß $\mathfrak{u}^*$ sogar ein Ultrafilter ist, sei M^* eine gegebene Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann gilt einerseits

$$\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \in M^*} \mathfrak{v}_n \vee \bigvee_{m \in \mathbb{N} \setminus M^*} \mathfrak{v}_m .$$

Da aber $\{\mathfrak{v}_n: n \in \mathbb{N}\}$ ein disjunktes System ist, erhält man andererseits

$$\bigvee_{n \in M^*} \mathfrak{v}_n \wedge \bigvee_{m \in \mathbb{N} \setminus M^*} \mathfrak{v}_m = \mathfrak{o} .$$

Schließlich war $\mathfrak{w}$ als Ultrafilter von X vorausgesetzt. Es muß daher genau einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

$$\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \in M^*} \mathfrak{v}_n \quad \textit{oder} \quad \bigvee_{m \in \mathbb{N} \setminus M^*} \mathfrak{v}_m .$$

Im ersten Fall ergibt sich $M^* \in \mathfrak{u}^*$ und im zweiten Fall entsprechend $\mathbb{N} \setminus M^* \in \mathfrak{u}^*$. Somit ist $\mathfrak{u}^*$ ein Ultrafilter und sogar ein freier Ultrafilter, weil aus $\mathfrak{u}^* = \widehat{m}$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ nämlich $\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_m$ im Widerspruch zu $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \geq m+1} \mathfrak{v}_n$ und zur Disjunktheit der $\mathfrak{v}_n$ folgen würde. Mit diesem freien Ultrafilter u* ergibt sich jetzt

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_n = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}^*} \bigvee_{n \in U^*_W} \mathfrak{v}_n$$

$$= \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \bigvee_{W \in \mathfrak{v}_n} \mathfrak{v}_n \leq \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \widehat{W} = \mathfrak{w} .$$

Wieder, weil $\mathfrak{w}$ selbst als Ultrafilter vorausgesetzt wurde, folgt hieraus aber sogar $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$.
Zum Nachweis der Eindeutigkeit von $\mathfrak{u}^*$ sei auch $\mathfrak{u}^{**}$ ein freier Ultrafilter von $\mathbb{N}$, mit dem ebenfalls

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^{**}} = \bigwedge_{U^{**} \in \mathfrak{u}^{**}} \bigvee_{n \in U^{**}} \mathfrak{v}_n$$

erfüllt ist. Aus $W \in \mathfrak{w}$ folgt dann $W \supset \bigcup\{V_n: n \in U^{**}\}$ mit einer geeigneten Menge $U^{**} \in \mathfrak{u}^{**}$ und mit Mengen $V_n \in \mathfrak{v}_n$. Hieraus ergibt sich weiter $U^*_W \supset U^{**}$. Da aber W eine beliebige Menge aus $\mathfrak{w}$ war, erhält man sogar $\mathfrak{u}^* \geq \mathfrak{u}^{**}$ und damit $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}^{**}$.
Schließlich seien alle Ultrafilter $\mathfrak{v}_n$ abzählbar primitiv. Es sei also

$$\mathfrak{v}_n \leq \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}_{n,m}$$

mit primitiven Ultrafiltern $\mathfrak{p}_{n,m}$ erfüllt. Es folgt

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} \leq \bigvee_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathfrak{p}_{n,m}.$$

Wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist somit auch $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ abzählbar primitiv. •

Der nächste Satz zeigt, daß die Ultrafilter $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ im Sinn der Präordnung ◀ obere Schranken der Ultrafilterfolge $(\mathfrak{v}_n)$ liefern.

1.2 *Es sei* $\mathfrak{u}^*$ *ein freier Ultrafilter von* $\mathbb{N}$. *Dann gibt es zu jedem Index* $k \in \mathbb{N}$ *eine Abbildung* $\psi_k: X \to X$ *mit*

$$\psi_k \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \mathfrak{v}_k \quad und \quad \psi_k = \varphi_k \circ \psi_{k+1}.$$

Beweis: Es sei $\{x_\lambda: \lambda \in \mathbb{N}\}$ eine fest gewählte Abzählung von X, und $k \in \mathbb{N}$ sei gegeben. Da φ_k nach der generellen Voraussetzung (*) surjektiv ist, wird durch

$$\breve{\varphi}_k y = x_{\lambda(y)} \quad mit \quad \lambda(y) = \min\{\lambda: \varphi_k x_\lambda = y\}$$

eine Abbildung $\breve{\varphi}_k: X \to X$ mit $\varphi_k \circ \breve{\varphi}_k = \mathrm{id}_X$ definiert. Wieder wegen (*) ist $\{\mathfrak{v}_n: n \in \mathbb{N}\}$ ein disjunktes System, zu dem eine Zerlegung $\{Z_n: n \in \mathbb{N}\}$ von X mit $Z_n \in \mathfrak{v}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gehört. Mit Hilfe dieser Zerlegung kann dann die Abbildung ψ_k folgendermaßen definiert werden:

$$\psi_k y = \begin{cases} \varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_{n-1} y & \\ y & \textit{für} \quad y \in Z_n \quad \textit{mit} \\ \breve{\varphi}_{k-1} \circ \ldots \circ \breve{\varphi}_n y & \end{cases} \quad \begin{matrix} k < n \\ k = n\,. \\ k > n \end{matrix}$$

Zum Nachweis von $\psi_k \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \mathfrak{v}_k$ sei eine beliebige Filtermenge $V_k \in \mathfrak{v}_k$ gegeben. Da $\mathfrak{u}^*$ ein freier Ultrafilter ist, gibt es eine Filtermenge $U^*_0 \in \mathfrak{u}^*$ mit $U^*_0 \subset \{n: n > k\}$, so daß für alle $n \in U^*_0$ und alle $y \in Z_n$ nur die erste Zeile in der Definition von ψ_k zuständig ist. Wegen $\varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_{n-1} \mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_k$ gibt es zu jedem $n \in U^*_0$ ein $V_n \in \mathfrak{v}_n$ mit $V_n \subset Z_n$ und mit

$$\psi_k V_n = \varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_{n-1} V_n = V_k\,.$$

Es folgt

$$\psi_k(\bigcup_{n \in U_0^*} V_n) \subset V_k$$

und daher

$$\psi_k \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \psi_k(\bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_n) = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{n \in U^*} \psi_k \mathfrak{v}_n$$

$$\leq \bigvee_{n \in U_0^*} \psi_k \mathfrak{v}_n \leq \overset{\frown}{V}_k$$

für alle $V_k \in \mathfrak{v}_k$, also $\psi_k \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} \leq \mathfrak{v}_k$ und damit $\psi_k \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \mathfrak{v}_k$, weil ja $\mathfrak{v}_k$ ein Ultrafilter ist.

Es muß nun noch $\psi_k = \varphi_k \circ \psi_{k+1}$ nachgewiesen werden. Dazu sei $y \in Z_n$ vorausgesetzt. Wegen der Definition von ψ_k und ψ_{k+1} hat man es dann mit folgender Fallunterscheidung zu tun.

$n > k+1$: $\varphi_k(\psi_{k+1} y) = \varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_{n-1} y) = \varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_{n-1} y = \psi_k y$.

$n = k+1$: $\varphi_k(\psi_{k+1} y) = \varphi_k(y) = \psi_k y$.

$n = k$: $\varphi_k(\psi_{k+1} y) = \varphi_k(\breve{\varphi}_k\, y) = y = \psi_k y$.

$n < k$: $\varphi_k(\psi_{k+1} y) = \varphi_k(\breve{\varphi}_k \circ \ldots \circ \breve{\varphi}_n\, y) = \breve{\varphi}_{k-1} \circ \ldots \circ \breve{\varphi}_n\, y = \psi_k y$. •

Nach dem soeben bewiesenen Satz gilt $\psi_k \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} = \mathfrak{v}_k$ und damit $\mathfrak{v}_k \blacktriangleleft \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher ist $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ im Sinn der Präordnung eine obere Schranke der Folge $(\mathfrak{v}_n)$, die im allgemeinen jedoch noch von dem freien Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ abhängen wird. Im nächsten Satz soll gezeigt werden, daß bei dieser Abhängigkeit ein modifiziertes Isotonieverhalten gewährleistet ist.

1.3 *Es seien $\mathfrak{u}_1^*$ und $\mathfrak{u}_2^*$ freie Ultrafilter von $\mathbb{N}$, für die $\mathfrak{u}_2^* \blacktriangleleft \mathfrak{u}_1^*$ gilt. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{u}_3^*$ von $\mathbb{N}$ mit $\mathfrak{u}_3^* \sim \mathfrak{u}_2^*$ und mit $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_3^*} \blacktriangleleft \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*}$. Ist hierbei zusätzlich $\mathfrak{u}_1^* \not\sim \mathfrak{u}_2^*$ erfüllt, so folgt auch $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*} \not\sim \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_3^*}$.*

B e w e i s: Wegen $\mathfrak{u}_2^* \blacktriangleleft \mathfrak{u}_1^*$ gibt es eine Abbildung $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\alpha \mathfrak{u}_1^* = \mathfrak{u}_2^*$. Im Fall $\mathfrak{u}_1^* \not\sim \mathfrak{u}_2^*$ ist α überdies auf $\mathfrak{u}_1^*$ nicht injektiv. Von dieser Abbildung α soll nun in einem ersten Beweisschritt zusätzlich vorausgesetzt werden, daß

(1) $\alpha(n) \leq n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

erfüllt ist.
Die Menge $M^* = \{n: \alpha(n) = n\}$ kann im Fall $\mathfrak{u}_1^* \not\sim \mathfrak{u}_2^*$ keine Filtermenge von $\mathfrak{u}_1^*$ sein, weil sonst α auf $\mathfrak{u}_1^*$ injektiv wäre. Wegen (1) gibt es dann also eine Filtermenge $U_1^{**} \in \mathfrak{u}_1^*$ mit

(2) $\alpha(n) < n$ *für alle* $n \in U_1^{**}$.

Bezüglich der Zerlegung $\{Z_n: n \in \mathbb{N}\}$ von X aus der generellen Voraussetzung (*) sei nun für $y \in Z_n$

$$\chi y = \begin{cases} \varphi_{\alpha(n)} \circ \ldots \circ \varphi_{n-1} y & \\ & \textit{wenn} \\ y & \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha(n) < n \\ \alpha(n) = n \end{matrix} \;.$$

Mit der so definierten Abbildung χ: $X \to X$ ist offenbar $\chi\mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_{\alpha(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, und wegen $\alpha\mathfrak{u}_1^* = \mathfrak{u}_2^*$ erhält man

$$\chi\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*} = \bigwedge_{U_1^* \in \mathfrak{u}_1^*} \; \bigvee_{n \in U_1^*} \chi\mathfrak{v}_n = \bigwedge_{U_1^* \in \mathfrak{u}_1^*} \; \bigvee_{n \in U_1^*} \mathfrak{v}_{\alpha(n)} =$$
$$= \bigwedge_{U_2^* \in \mathfrak{u}_2^*} \; \bigvee_{m \in U_2^*} \mathfrak{v}_m = \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_2^*} \;.$$

Dies ist gleichwertig mit $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_2^*} \blacktriangleleft \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*}$, und das ist die Behauptung des Satzes mit $\mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_3^*} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_2^*}$.
Im Fall $\mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_1^*} \not\prec \mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_2^*}$ ist für alle $n \in U_1^{**}$ wegen (2) in der Definition von χ die erste Zeile maßgebend. Und da φ_{n-1} auf $\mathfrak{v}_n$ nicht injektiv ist, kann dann auch χ nicht auf $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*}$ injektiv sein. Es folgt $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*} \not\prec \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_2^*}$, also die Zusatzbehauptung.
Im zweiten Beweisschritt wird nun auf die Voraussetzung (1) verzichtet. Es wird aber α dazu benutzt, eine neue Abbildung β: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so zu konstruieren, daß diese dann die (1) entsprechende Bedingung erfüllt, man also das bisher Bewiesene für β übernehmen kann.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$M_{n+1}^* = \{m\colon m \in \mathbb{N} \wedge m \leq n \wedge \alpha(m) = \alpha(n+1)\}$$

und im Fall $M_{n+1}^* \neq 0$ außerdem

$$m_{n+1} = \min M_{n+1}^* \,,$$

so daß dann $m_{n+1} \leq n$ gilt. Die Abbildung β wird nun folgendermaßen rekursiv definiert:

$$\beta(0) = 0,$$

$$\beta(n+1) = \begin{cases} \beta(m_{n+1}) & \\ & \textit{wenn} \\ \min\{m\colon m \in \mathbb{N} \wedge m > \beta(l) \textit{ für alle } l \leq n\} & \end{cases} \quad \begin{matrix} M_{n+1}^* \neq \emptyset \\ M_{n+1}^* = \emptyset \end{matrix} \;.$$

Der Nachweis, daß β die Forderung (1) erfüllt, daß also $\beta(n) \leq n$ gilt, wird jetzt durch Induktion über n geführt. $\beta(0) = 0$ gilt nach Definition. Weiter sei $\beta(l) \leq l$ für alle $l \leq n$ vorausgesetzt. Tritt nun in der Definition von $\beta(n+1)$ der Fall $M_{n+1}^* \neq \emptyset$ ein, so ergibt sich wegen der Induktionsvoraussetzung und wegen $m_{n+1} \leq n$

$$\beta(n+1) = \beta(m_{n+1}) \leq m_{n+1} \leq n < n+1.$$

Im Fall $M_{n+1}^* = \emptyset$ erhält man

$$\beta(n+1) = \min\{m\colon m \in \mathbb{N} \wedge m > \beta(l) \textit{ für alle } l \leq n\}$$
$$= \min\{m\colon m \in \mathbb{N} \wedge m > l \textit{ für alle } l \leq n\} = n+1.$$

Da damit die Forderung (1) für β nachgewiesen ist, kann jetzt im ersten Beweisschritt β an die Stelle von α treten. Mit $\mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_3^*} = \beta\mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_1^*}$ ergibt sich daher die Behauptung $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_3^*} \blacktriangleleft \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*}$, so daß nur noch $\mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_2^*} \sim \mathfrak{u}_{\mathfrak{u}_3^*}$ bewiesen werden muß. Dazu wird zunächst gezeigt, daß β in der Form $\beta = \gamma \circ \alpha$ faktorisiert werden kann.
Aus $\alpha(m) = \alpha(n + 1)$ mit $m \leq n$ folgt $M_{n+1}^* \neq \emptyset$ und damit die Existenz von $m_{n+1} \leq m$. Wegen der Definition von β ergibt sich nun auch

$$\beta(m) = \beta(m_{n+1}) = \beta(n + 1).$$

Daher existiert eine Abbildung $\gamma\colon X \rightarrow X$ mit $\beta = \gamma \circ \alpha$. Umgekehrt folgt aber aus $\beta(m) = \beta(n + 1)$ mit $m \leq n$, daß in der Definition von $\beta(n + 1)$ der Fall $M_{n+1}^* \neq \emptyset$ eintritt, daß also auch $\alpha(m) = \alpha(n + 1)$ erfüllt ist. Daher ist γ auf *Im* α sogar injektiv, und man erhält daher wegen

$$\gamma\mathfrak{u}_2^* = \gamma(\alpha\mathfrak{u}_1^*) = \beta\mathfrak{u}_1^* = \mathfrak{u}_3^*$$

die Behauptung $\mathfrak{u}_2^* \sim \mathfrak{u}_3^*$.
Die Zusatzbehauptung, daß aus $\mathfrak{u}_1^* \not\sim \mathfrak{u}_2^*$ jetzt auch $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*} \not\sim \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_3^*}$ folgt, ergibt sich nun unmittelbar: Nach dem ersten Beweisschritt muß nämlich nur gezeigt werden, daß β auf $\mathfrak{u}_1^*$ nicht injektiv ist. Wäre dies der Fall, so erhielte man $\mathfrak{u}_1^* \sim \beta\mathfrak{u}_1^* = \mathfrak{u}_3^*$, wegen $\mathfrak{u}_2^* \sim \mathfrak{u}_3^*$ also auch $\mathfrak{u}_1^* \sim \mathfrak{u}_2^*$ im Widerspruch zur Voraussetzung. •

Im Anschluß an den soeben bewiesenen Satz sei noch ausdrücklich darauf hingewisen, daß aus $\mathfrak{u}_1^* \sim \mathfrak{u}_2^*$ keineswegs die Äquivalenz von $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*}$ und $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}_1^*}$ folgen muß. Dieser Umstand wird im nächsten Abschnitt eine entscheidende Rolle spielen.

2. Nichtexistenz von Suprema

Auch in diesem Abschnitt wird auf die generelle Voraussetzung (*) und die in ihr auftretenden Bezeichnungen Bezug genommen. Satz 1.2 besagte, daß die Ultrafilter $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ obere Schranken der Ultrafilterfolge $(\mathfrak{v}_n)$ sind, die sich in Abhängigkeit von $\mathfrak{u}^*$ im Sinn von Satz 1.3 im wesentlichen isoton verhalten. Aber auch dann, wenn $\mathfrak{u}^*$ ein primitiver Ultrafilter ist, liefert die obere Schranke $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ nicht etwa ein Supremum der Folge $(\mathfrak{v}_n)$. Im Gegenteil, es soll in diesem Abschnitt unter verschiedenen Gesichtspunkten die Nicht-Existenz eines solchen Supremums nachgewiesen werden. Zuvor jedoch noch eine in diesen Zusammenhang gehörende Vorbemerkung.
Die Ultrafilter $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ sind, abgesehen von ihrer Konstruktion, obere Schranken der Folge $(\mathfrak{v}_n)$ einer speziellen Art. Ein Ultrafilter $\mathfrak{w}$ ist ja bereits dann obere Schranke von $(\mathfrak{v}_n)$, wenn $\mathfrak{v}_n \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, wenn es also Abbildungen ψ_n mit $\psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n$ gibt. Daß diese Abbildungen darüber hinaus auch noch mit den Abbildungen φ_n im Sinn der Gleichungen $\psi_n = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$ verträglich sind, ist eine zusätzliche Eigenschaft. Im allgemeinen muß ψ_n nicht einmal durch ψ_{n+1} faktorisierbar sein, so daß man auch nicht nachträglich zu den Abbildungen ψ_n entsprechende Abbildungen φ_n konstruieren kann. Diese Situation wird durch den folgenden Satz illustriert, der nicht auf abzählbare Ultrafilterfolgen beschränkt ist und auf den an einer späteren Stelle noch zurückgegriffen wird.

2.1 *Es sei* $(\mathfrak{v}_\alpha)_{\alpha<\eta}$ *eine wohlgeordnete und aufsteigende Ultrafilterfolge; d.h. aus* $\alpha < \beta < \eta$ *folgt* $\mathfrak{v}_\alpha \blacktriangleleft \mathfrak{v}_\beta$. *Ferner sei der Ultrafilter* $\mathfrak{w}$ *eine obere Schranke dieser Folge. Es soll also Abbildungen* $\psi_\alpha: X \to X$ *mit* $\psi_\alpha \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\alpha$ $(\alpha < \eta)$ *geben. Dann sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig.*

(1) *Zu je zwei Indizes* α, β *mit* $\alpha < \beta < \eta$ *existiert eine Abbildung* $\varphi_\alpha^\beta: X \to X$ *mit* $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^\beta \circ \psi_\beta$.

(2) *Für je zwei Punkte* $x, y \in X$ *gilt: Aus* $\psi_\beta x = \psi_\beta y$ *folgt auch* $\psi_\alpha x = \psi_\alpha y$ *für alle* $\alpha < \beta$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Aus $\psi_\beta x = \psi_\beta y$ folgt für $\alpha < \beta$ und wegen (1)

$$\psi_\alpha x = \varphi_\alpha^\beta(\psi_\beta x) = \varphi_\alpha^\beta(\psi_\beta y) = \psi_\alpha y.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Da im Fall $\alpha < \beta$ aus $\psi_\beta x = \psi_\beta y$ nach Voraussetzung auch $\psi_\alpha x = \psi_\alpha y$ folgt, wird durch $\varphi_\alpha^\beta(\psi_\beta x) = \psi_\alpha x$ eine Abbildung φ_α^β: *Im* $\psi_\beta \to X$ definiert, die dann noch zu einer Abbildung $\varphi_\alpha^\beta: X \to X$ fortgesetzt werden kann. Unabhängig von der Art dieser Fortsetzung ergibt sich unmittelbar $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^\beta \circ \psi_\beta$ aus der Definition der Abbildung.

Der unterschiedlichen Beweisaspekte wegen wird nachfolgend die Nicht-Existenz von Suprema zunächst in zwei spezielleren Fällen und danach ohne zusätzliche Voraussetzungen bewiesen.

2.2 *Es sei* $\mathfrak{w}$ *ein Ultrafilter mit* $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \geq m} \mathfrak{v}_n$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$, *der eine obere Schranke der Ultrafilterfolge* $(\mathfrak{v}_n)$ *ist, der also* $\mathfrak{v}_n \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *erfüllt. Dann ist* $\mathfrak{w}$ *kein Supremum der Folge* $(\mathfrak{v}_n)$: *Es gibt einen Ultrafilter* $\mathfrak{w}'$ *mit denselben Eigenschaften wie* $\mathfrak{w}$, *mit* $\mathfrak{w}' \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ *und mit* $\mathfrak{w}' \not\sim \mathfrak{w}$.

Beweis: Wegen Satz 1.1 gilt

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_n = \mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$$

mit einem eindeutig bestimmten freien Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ von $\mathbb{N}$. Bezüglich der Zerlegung $\{Z_n: n \in \mathbb{N}\}$ aus (*) wird durch

$$\vartheta x = \begin{cases} x & \text{für } x \in Z_0 \\ \varphi_{n-1} x & \text{für } x \in Z_n \text{ mit } n > 0 \end{cases}$$

eine Abbildung $\vartheta: X \to X$ definiert mit $\vartheta \mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_{n-1}$ für alle $n > 0$. Da nach der generellen Voraussetzung (*) die Abbildung φ_{n-1} auf $\mathfrak{v}_n$ nicht injektiv ist, kann auch ϑ auf keinem der Filter $\mathfrak{v}_n$ mit $n > 0$ injektiv sein. Es folgt, daß ϑ auch auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv ist. Für den Ultrafilter $\mathfrak{w}' = \vartheta\mathfrak{w}$ gilt daher $\mathfrak{w}' \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}' \not\sim \mathfrak{w}$. Mit der durch $\chi(n) = \max\{n-1, 0\}$ definierten Abbildung $\chi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erhält man

$$\mathfrak{w}' = \vartheta\mathfrak{w} = \bigwedge_{\substack{U^* \in \mathfrak{u}^* \\ 0 \notin U^*}} \bigvee_{n \in U^*} \varphi_{n-1}\mathfrak{v}_n = \bigwedge_{\substack{U^* \in \mathfrak{u}^* \\ 0 \notin U^*}} \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_{n-1} =$$

$$= \bigwedge_{U' \in \chi\mathfrak{u}^*} \bigvee_{m \in U'} \mathfrak{v}_m = \mathfrak{w}_{\chi\mathfrak{u}^*}.$$

Offensichtlich ist χ auf $\mathfrak{u}^*$ injektiv. Es gilt also $\mathfrak{u}^* \sim \chi\mathfrak{u}^*$, aber $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*} \not\sim \mathfrak{w}_{\chi\mathfrak{u}^*}$. Da ϑ im wesentlichen nur eine Verschiebung der Indizes bewirkt, folgt schließlich aus $\psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n$ unmittelbar auch $\psi_n\mathfrak{w}' = \mathfrak{v}_n$, also $\mathfrak{v}_n \blacktriangleleft \mathfrak{w}'$, für alls $n \in \mathbb{N}$. •

Ein Beispiel zu der Bemerkung am Ende des ersten Abschnitts liefert der in diesem Beweis enthaltene Hinweis: Aus der Äquivalenz der Filter $\mathfrak{u}^*$ und $\chi\mathfrak{u}^*$ folgt nicht die Äquivalenz von $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ und $\mathfrak{w}_{\chi\mathfrak{u}^*}$.

Benutzt wurden in dem Beweis die Abbildungen ψ_n und φ_n, nicht aber die Beziehungen $\psi_n = \varphi_n \circ \varphi_{n+1}$. Die Gültigkeit dieser Gleichungen bezüglich $\mathfrak{w}$ zieht jedoch ihre Gültigkeit auch bezüglich $\mathfrak{w}'$ nach sich.

Eine Variante des letzten Satzes über die Nicht-Existenz eines Supremums der Form $\mathfrak{w}_{\mathfrak{u}^*}$ besagt, daß auch kein abzählbar-primitives Supremum mit punktuellen Abbildungen ψ_n existieren kann.

2.3 *Es seien* $\mathfrak{p}_x$ $(x \in X)$ *paarweise verschiedene primitive Ultrafilter und* $\mathfrak{u}$ *ein beliebiger Ultrafilter von* X. *Ferner seien zu dem abzählbar-primitiven Ultrafilter*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U \in \mathfrak{u}} \bigvee_{x \in U} \mathfrak{p}_x$$

Abbildungen $\psi_n\colon X \to X$ *mit* $\psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n$ *gegeben, die auf* $\mathfrak{w}$ *punktuell sind* $(n \in \mathbb{N})$. *Dann ist* $\mathfrak{w}$ *kein Supremum der Folge* $(\mathfrak{v}_n)$: *Es existiert ein Ultrafilter* $\mathfrak{w}'$ *mit* $\mathfrak{w}' \blacktriangleleft \mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}' \not\sim \mathfrak{w}$ *und mit Abbildungen* $\psi'_n\colon X \to X$, *die ebenfalls* $\psi'_n\mathfrak{w}' = \mathfrak{v}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *erfüllen. Aus* $\psi_n = \varphi_n \circ \psi'_{n+1}$ mod $\mathfrak{w}$ *folgt auch* $\psi_n = \varphi_n \circ \psi'_{n+1}$ mod $\mathfrak{w}'$.

Beweis: Da ψ_n nach Voraussetzung auf $\mathfrak{w}$ punktuell ist, gibt es eine Filtermenge $U_n \in \mathfrak{u}$, so daß $\psi_n\mathfrak{p}_x$ für alle $x \in U_n$ ein an einen Punkt $y(x)$ gebundener Ultrafilter ist; d. h. $\psi_n\mathfrak{p}_x = \widehat{y(x)}$ für $x \in U_n$. Durch $\psi'_n x = y(x)$ wird daher eine Abbildung $\psi'_n\colon U_n \to X$ mit $\psi_n\mathfrak{p}_x = \widehat{\psi'_n x}$ definiert, die noch zu einer Abbildung $\psi'_n\colon X \to X$ fortgesetzt werden kann. Es folgt

$$\mathfrak{v}_n = \psi_n\mathfrak{w} = \bigwedge_{\substack{U \in \mathfrak{u} \\ U \subset U_n}} \bigvee_{x \in U} \widehat{\psi'_n x} = \bigwedge_{U' \in \psi'_n\mathfrak{u}} \bigvee_{y \in U'} \hat{y} = \psi'_n\mathfrak{u}.$$

Die Behauptung des Satzes ist daher mit $\mathfrak{w}' = \mathfrak{u}$ erfüllt: Es ist ja $\{\mathfrak{p}_x\colon x \in X\}$ ein disjunktes System, zu dem es dann eine Abbildung $\eta\colon X \to X$ mit $\eta\mathfrak{p}_x = \hat{x}$ gibt. Es folgt $\eta\mathfrak{w} = \mathfrak{u} = \mathfrak{w}'$, also $\mathfrak{w}' \blacktriangleleft \mathfrak{w}$. Außerdem ist η nicht injektiv auf $\mathfrak{w}$, so daß auch $\mathfrak{w}' \not\sim \mathfrak{w}$ erfüllt ist.

Gilt $\psi = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$ mod $\mathfrak{w}$, so folgt ebenfalls

$$\psi'_n\mathfrak{w}' = \psi'_n\mathfrak{u} = \psi_n\mathfrak{w} = \varphi_n \circ \psi_{n+1}\mathfrak{w} = \varphi_n \circ \psi'_{n+1}\mathfrak{u} = \varphi_n \circ \psi'_{n+1}\mathfrak{w}'.$$ •

Es soll nun noch die Nicht-Existenz eines Supremums ohne einschränkende Voraussetzungen bewiesen werden. Dabei dienen die folgenden vorbereitenden Sätze zunächst einer gewissen Normierung.

2.4 *Es sei* $\mathfrak{w}$ *ein Ultrafilter von* X, *zu dem es Abbildungen* ψ_n: X $\to$ X *mit* $\psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gibt. Dann existieren Abbildungen* κ: X $\to$ X *und* ψ'_n: X $\to$ X *mit* $\psi_n = \psi'_n \circ \kappa$ $(n \in \mathbb{N})$ *und mit folgender Eigenschaft:*

(3) *Aus* $\psi'_n x = \psi'_n y$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *folgt* $x = y$ $(x, y \in X)$.

Für den Ultrafilter $\mathfrak{w}' = \kappa\mathfrak{w}$ *gilt entsprechend* $\psi'_n\mathfrak{w}' = \mathfrak{v}_n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Aus der Gültigkeit von* $\psi_n = \varphi_n \circ \psi_{n+1} \bmod \mathfrak{w}$ *folgt auch* $\psi'_n = \varphi_n \circ \psi'_{n+1} \bmod \mathfrak{w}'$.

Beweis: Für Paare von Punkten aus X sei $x \approx y$ durch $\psi_n x = \psi_n y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Dann ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation, die einen Quotientenraum $X' = X/\!\approx$ und

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "\kappa"] & X' \arrow[l, "\kappa'"'] \arrow[d, "\overline{\psi}_n"] & X \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[dl, "\psi'_n"] \\
 & X \arrow[ul, "\psi_n"] &
\end{tikzcd}$$

die zugehörige kanonische Abbildung κ': $X \to X'$ bestimmt. Bei festem n folgt aus $\kappa' x = \kappa' y$, also $x \approx y$, auch $\psi_n x = \psi_n y$. Daher gibt es eine Abbildung $\overline{\psi}_n$: $X' \to X$ mit $\psi_n = \overline{\psi}_n \circ \kappa'$. Es folgt

$$\overline{\psi}_n(\kappa'\mathfrak{w}) = \psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n.$$

Und da $\mathfrak{v}_n$ ein freier Ultrafilter ist, muß dann auch $\kappa'\mathfrak{w}$ ein freier Ultrafilter sein. Daher ist X′ wie X eine abzählbar unendliche Menge, und es gibt eine Bijektion σ: $X' \to X$. Mit

$$\kappa = \sigma \circ \kappa' \; \textit{und} \; \psi'_n = \overline{\psi}_n \circ \sigma^{-1}$$

folgt

$$\psi_n = \overline{\psi}_n \circ \kappa' = \overline{\psi}_n \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \kappa' = \psi'_n \circ \kappa$$

und für $\mathfrak{w}' = \kappa\mathfrak{w}$

$$\psi'_n\mathfrak{w}' = \psi'_n \circ \kappa\mathfrak{w} = \psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n.$$

Weiter sei $\psi'_n x = \psi'_n y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt. Da κ' surjektiv und σ bijektiv ist, muß auch κ surjektiv sein. Es gibt also Punkte $x_1, y_1 \in X$ mit $\kappa x_1 = x$ und $\kappa y_1 = y$. Es folgt

$$\psi_n x_1 = \psi'_n \circ \kappa x_1 = \psi'_n x = \psi'_n y = \psi'_n \circ \kappa y_1 = \psi_n y_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $x_1 \approx y_1$, also $\kappa' x_1 = \kappa' y_1$, und so weiter

$$x = \kappa x_1 = \sigma \circ \kappa' x_1 = \sigma \circ \kappa' y_1 = \kappa y_1 = y.$$

Das ist die Eigenschaft (3). Schließlich ergibt sich aus $\psi_n \mathfrak{w} = \varphi_n \circ \psi_{n+1} \mathfrak{w}$ auch

$$\psi'_n \mathfrak{w}' = \psi'_n \circ \kappa \mathfrak{w} = \psi_n \mathfrak{w} = \varphi_n \circ \psi_{n+1} \mathfrak{w} = \varphi_n \circ \psi'_{n+1} \circ \kappa \mathfrak{w} = \varphi_n \circ \psi'_{n+1} \mathfrak{w}'. \qquad \bullet$$

Die zu einer oberen Schranke $\mathfrak{w}$ der Folge $(\mathfrak{v}_n)$ nach dem soeben bewiesenen Satz stets existierende obere Schranke $\mathfrak{w}'$ mit $\mathfrak{w}' \blacktriangleleft \mathfrak{w}$, deren zugehörige Abbildungen ψ'_n noch die zusätzliche Eigenschaft (3) besitzen, soll nun noch weiter normiert werden. Dazu sei $P = \prod_{n \in \mathbb{N}} X$ das kartesische Produkt von abzählbar unendlich vielen Exemplaren X. Jedes Element $\hat{x}$ der überabzählbaren Produktmenge P hat die Form $\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$. Weiter sei π_n: $P \to X$ die n-te Projektionsabbildung, für die also $\pi_n \hat{x} = x_n$ gilt.

2.5 *Es sei* $\mathfrak{w}'$ *ein Ultrafilter von* X *mit Abbildungen* ψ'_n: $X \to X$ $(n \in \mathbb{N})$, *die* $\psi'_n \mathfrak{w}' = \mathfrak{v}_n$ *erfüllen und außerdem die Eigenschaft* (3) *aus Satz 2.4 besitzen. Dann gibt es eine injektive Abbildung* χ: $X \to P$ *mit* $\psi'_n = \pi_n \circ \chi$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Für den zu* $\mathfrak{w}'$ *äquivalenten Ultrafilter* $\hat{\mathfrak{w}} = \chi \mathfrak{w}'$ *gilt* $\pi_n \hat{\mathfrak{w}} = \mathfrak{v}_n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Außerdem folgt aus* $\psi'_n = \varphi_n \circ \psi'_{n+1}$ mod $\mathfrak{w}'$ *auch* $\pi_n = \varphi_n \circ \pi_{n+1}$ mod $\hat{\mathfrak{w}}$.

Beweis: Durch $\chi x = (\psi'_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ wird eine Abbildung χ: $X \to P$ definiert. Aus $\chi x = \chi y$ folgt $\psi'_n x = \psi'_n y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen (3) daher $x = y$. Somit ist χ sogar injektiv.
Unmittelbar aus der Definition von χ ergibt sich $(\pi_n \circ \chi)x = \psi'_n x$ für alle $x \in X$ und damit $\pi_n \circ \chi = \psi'_n$. Für den Ultrafilter $\hat{\mathfrak{w}} = \chi \mathfrak{w}'$ von P, der aber abzählbare Filtermengen besitzt, folgt daraus

$$\pi_n \hat{\mathfrak{w}} = \pi_n \circ \chi \mathfrak{w}' = \psi'_n \mathfrak{w}' = \mathfrak{v}_n \; (n \in \mathbb{N})$$

und übrigens sinngemäß auch (3), weil die Projektionsabbildungen diese Eigenschaften automatisch besitzen.
Setzt man schließlich $\psi'_n \mathfrak{w}' = \varphi_n \circ \psi'_{n+1} \mathfrak{w}'$ voraus, erhält man auch

$$\pi_n \hat{\mathfrak{w}} = \pi_n \circ \chi \mathfrak{w}' = \psi'_n \mathfrak{w}' = \varphi_n \circ \psi'_{n+1} \mathfrak{w}' = \varphi_n \circ \pi_{n+1} \circ \chi \mathfrak{w}' = \varphi_n \circ \pi_{n+1} \hat{\mathfrak{w}}. \qquad \bullet$$

2.6 *Zu dem Ultrafilter* $\hat{\mathfrak{w}}$ *von* P *aus dem vorangehenden Satz gibt es einen Ultrafilter* $\tilde{\mathfrak{w}}$ *von* P, *der ebenso wie* $\hat{\mathfrak{w}}$ *abzählbare Filtermengen besitzt und für den* $\tilde{\mathfrak{w}} \blacktriangleleft \hat{\mathfrak{w}}$, $\tilde{\mathfrak{w}} \not\approx \hat{\mathfrak{w}}$ *und* $\pi_n \tilde{\mathfrak{w}} = \mathfrak{v}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Aus* $\pi_n = \varphi_n \circ \pi_{n+1}$ mod $\hat{\mathfrak{w}}$ *folgt auch* $\pi_n = \varphi_n \circ \pi_{n+1}$ mod $\tilde{\mathfrak{w}}$.

Beweis: Bei gegebenem Punkt $\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von P sei $y_n = \varphi_n x_{n+1}$ und $\hat{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch $\tau \hat{x} = \hat{y}$ wird dann eine Abbildung τ: $P \to P$ definiert, für die unmittelbar $\pi_n \circ \tau = \varphi_n \circ \pi_{n+1}$ folgt. Der Ultrafilter $\tilde{\mathfrak{w}} = \tau \hat{\mathfrak{w}}$ von P besitzt wie $\hat{\mathfrak{w}}$ abzählbare Filtermengen, wegen seiner Definition gilt $\tilde{\mathfrak{w}} \blacktriangleleft \hat{\mathfrak{w}}$, und außerdem ergibt sich

$$\pi_n \tilde{\mathfrak{w}} = \pi_n \circ \tau \hat{\mathfrak{w}} = \varphi_n \circ \pi_{n+1} \hat{\mathfrak{w}} = \varphi_n \mathfrak{v}_{n+1} = \mathfrak{v}_n \; (n \in \mathbb{N}).$$

Die mittleren Gleichungen $\pi(\tau\hat{\mathfrak{w}}) = \varphi_n\mathfrak{v}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ besagen darüber hinaus, daß τ auf $\hat{\mathfrak{w}}$ nicht injektiv ist, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung (*) die Abbildung φ_n nicht injektiv auf $\mathfrak{v}_{n+1}$ ist. Daher gilt neben $\tilde{\mathfrak{w}} \blacktriangleleft \hat{\mathfrak{w}}$ sogar $\tilde{\mathfrak{w}} \not\sim \hat{\mathfrak{w}}$. Aus $\pi_n = \varphi_n \circ \pi_{n+1}$ mod $\hat{\mathfrak{w}}$ folgt schließlich

$$\pi_n\tilde{\mathfrak{w}} = \mathfrak{v}_n = \varphi_n\mathfrak{v}_{n+1} = \varphi_n \circ \pi_{n+1}\tilde{\mathfrak{w}}. \qquad \bullet$$

Zusammenfassend ergibt sich jetzt die Nicht-Existenz eines Supremums der Folge $(\mathfrak{v}_n)$ ohne spezielle Voraussetzungen und insbesondere auch ohne Annahme der Gültigkeit von $\psi_n = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$.

2.7 *Zu der echt aufsteigenden Ultrafilterfolge* $(\mathfrak{v}_n)$ *gibt es hinsichtlich der Präordnung* $\blacktriangleleft$ *kein Supremum.*

B e w e i s: Es werde angenommen, daß ein Ultrafilter $\mathfrak{w}$ von X existiert, der ein Supremum der Ultrafilterfolge $(\mathfrak{v}_n)$ ist. Insbesondere gibt es dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung ψ_n mit $\psi_n\mathfrak{w} = \mathfrak{v}_n$. Es sei nun $\mathfrak{w}'$ die nach Satz 2.4 zu $\mathfrak{w}$ existierende obere Schranke der Folge $(\mathfrak{v}_n)$. Wegen $\mathfrak{w}' \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ muß dann sogar $\mathfrak{w}' \sim \mathfrak{w}$ erfüllt sein, und auch $\mathfrak{w}'$ ist ein Supremum von $(\mathfrak{v}_n)$. Weiter sei $\hat{\mathfrak{w}}$ der nach Satz 2.5 zu $\mathfrak{w}'$ bestimmte Ultrafilter, für den ebenfalls $\hat{\mathfrak{w}} \sim \mathfrak{w}' \sim \mathfrak{w}$ gilt. Zwar ist $\hat{\mathfrak{w}}$ ein Ultrafilter der überabzählbaren Produktmenge P. Er enthält jedoch nach Satz 2.5 eine abzählbare Filtermenge $\hat{W}$, und man kann $\hat{\mathfrak{w}}$ auch als Ultrafilter von $\hat{W}$ auffassen. Mit einer Bijektion $\alpha\colon \hat{W} \to X$ ist dann $\hat{\mathfrak{w}}_1 = \alpha\hat{\mathfrak{w}}$ wieder ein Ultrafilter von X mit $\hat{\mathfrak{w}}_1 \sim \hat{\mathfrak{w}} \sim \mathfrak{w}' \sim \mathfrak{w}$ und daher ebenfalls ein Supremum von $(\mathfrak{v}_n)$.
Nach Satz 2.6 gibt es aber eine auf $\hat{\mathfrak{w}}$ nicht injektive Abbildung $\tau\colon P \to P$, bei der der Bildfilter $\tilde{\mathfrak{w}} = \tau\hat{\mathfrak{w}}$ ebenfalls eine obere Schranke von $(\mathfrak{v}_n)$ ist. Die abzählbare Filtermenge $\hat{W}$ von $\hat{\mathfrak{w}}$ wird durch τ wieder auf eine abzählbare Filtermenge $\tilde{W}$ von $\tilde{\mathfrak{w}}$ abgebildet. Mit einer Bijektion $\beta\colon \tilde{W} \to X$ ist dann $\tilde{\mathfrak{w}}_1 = \beta\tilde{\mathfrak{w}}$ ein Ultrafilter von X, und mit $\tau_1 = \beta \circ \tau \circ \alpha^{-1}$ folgt $\tilde{\mathfrak{w}}_1 = \tau_1\hat{\mathfrak{w}}_1$, also $\tilde{\mathfrak{w}}_1 \blacktriangleleft \hat{\mathfrak{w}}_1$. Nun ist aber wegen $\tilde{\mathfrak{w}}_1 \sim \tilde{\mathfrak{w}}$ auch $\tilde{\mathfrak{w}}_1$ eine obere Schranke der Folge $(\mathfrak{v}_n)$. Da jedoch $\hat{\mathfrak{w}}_1$ ein Supremum von $(\mathfrak{v}_1)$ ist, muß sogar $\tilde{\mathfrak{w}}_1 \sim \hat{\mathfrak{w}}_1$ erfüllt sein, und auch $\tilde{\mathfrak{w}}_1$ ist ein Supremum. Wegen $\tilde{\mathfrak{w}} \sim \tilde{\mathfrak{w}}_1 \sim \hat{\mathfrak{w}}_1 \sim \hat{\mathfrak{w}}$ ist dies ein Widerspruch, da τ auf $\hat{\mathfrak{w}}$ nicht injektiv ist und daher $\tilde{\mathfrak{w}} = \tau\hat{\mathfrak{w}} \not\sim \hat{\mathfrak{w}}$ gilt. $\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathfrak{w}}{X} \arrow[r, "\kappa"] & \underset{\mathfrak{w}'}{X} \arrow[r, dash, "\chi"] & \underset{\hat{\mathfrak{w}}}{P \supset \hat{W}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"] & \underset{\hat{\mathfrak{w}}_1}{X} \arrow[d, "\tau'"] \\
& & \underset{\tilde{\mathfrak{w}}}{P \supset \tilde{W}} \arrow[r, "\beta"'] & \underset{\tilde{\mathfrak{w}}_1}{X}
\end{tikzcd}$$

3. Die Klassen H_β

In (I) wurden die Ultrafilterklassen H_n für $n \in \mathbb{N}$ definiert: H_0 war die Menge aller gebundenen, H_1 die Menge der primitiven Ultrafilter. Schließlich bestand H_{k+1} aus allen Ultrafiltern der Form

$$\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \alpha(x)$$

mit einem Ultrafilter $\mathfrak{v} \in H_k$ und einer Injektion $\alpha\colon X \to H_1$ in die Menge aller primitiven Ultrafilter von X. Der vorangehende Abschnitt hat jedoch gezeigt, daß in der Vereinigungsmenge $H = \bigcup\{H_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ echt aufsteigende Folgen im Sinn der Präordnung $\blacktriangleleft$ kein Supremum besitzen, so daß man nicht in analoger Weise eine Limesklasse H_ω bilden kann. Indes legen die gewonnenen Ergebnisse folgende Alternative nahe.

Definition: *Für jede abzählbare Ordinalzahl $\beta \geq \omega$ bestehe H_β aus genau denjenigen Ultrafiltern $\mathfrak{w}$, die sich in folgender Weise darstellen lassen: Es gibt einen primitiven Ultrafilter $\mathfrak{p}^*$ von $\mathbb{N}$ und in $\bigcup\{H_\gamma\colon \gamma < \beta\}$ eine im Sinn von $\blacktriangleleft$ echt aufsteigende, in dieser Menge aber nicht beschränkte Folge $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{P^* \in \mathfrak{p}^*} \bigvee_{n \in P^*} \mathfrak{v}_n. \tag{4}$$

Die Überlegungen des vorigen Abschnitts zeigten, daß es zu jedem $\mathfrak{w} \in H_\beta$ eine mit $\mathfrak{w}$ beginnende echt absteigende Folge in H_β gibt. Andererseits ist aber H_β nach oben gegenüber der Operation $\langle\ ,\ \rangle$ abgeschlossen, wie der nächste Satz zeigt.

3.1 *Es sei $\alpha\colon X \to H_1$ eine Injektion in die Menge der primitiven Ultrafilter von X. Dann folgt aus $\mathfrak{w} \in H_\beta$ auch*

$$\langle \mathfrak{w}, \alpha \rangle = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \bigvee_{x \in W} \alpha(x) \in H_\beta.$$

Beweis: Wegen $\mathfrak{w} \in H_\beta$ besitzt $\mathfrak{w}$ eine Darstellung der Form (4) mit einem primitiven Ultrafilter $\mathfrak{p}^*$ von $\mathbb{N}$ und einer echt aufsteigenden Folge $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\bigcup\{H_\gamma\colon \gamma < \beta\}$. Eine Basismenge W' von $\langle \mathfrak{w}, \alpha \rangle$ hat die Form

$$W' = \bigcup_{x \in W} P_x$$

mit einer geeigneten Menge $W \in \mathfrak{w}$ und mit Mengen $P_x \in \alpha(x)$. Wegen (4) besitzt W die Form

$$W = \bigcup_{n \in P^*} V_n$$

mit einer Menge $P^* \in \mathfrak{p}^*$ und Mengen $V_n \in \mathfrak{v}_n$. Zusammen folgt

$$W' = \bigcup \left\{P_x\colon x \in \bigcup_{n \in P^*} V_n\right\} = \bigcup_{n \in P^*} \bigcup_{x \in V_n} P_x,$$

und die Mengen dieser Form bilden eine Filterbasis von

$$\bigwedge_{P^* \in \mathfrak{p}^*} \bigvee_{n \in P^*} \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle .$$

Damit gilt

$$\langle \mathfrak{w}, \alpha \rangle = \bigwedge_{P^* \in \mathfrak{p}^*} \bigvee_{n \in P^*} \langle \mathfrak{v}_n, \alpha \rangle .$$

Im Fall $\beta = \omega$ liegen mit den Filtern $\mathfrak{v}_n$ auch die Filter $\langle \mathfrak{v}_n, \alpha \rangle$ in $\bigcup\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$. Im Fall $\beta > \omega$ steht $\langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle \in \bigcup\{H_\gamma : \gamma < \beta\}$ als Induktionsvoraussetzung zur Verfügung. Und da die Folge $(\langle \mathfrak{v}_n, \alpha \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ dieselben Bedingungen wie die Folge $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt, gilt (4) auch für $\langle \mathfrak{w}, \alpha \rangle$. •

In der Darstellung (4) der Definition von H_β wird ein primitiver Ultrafilter $\mathfrak{p}^*$ von $\mathbb{N}$ benutzt. Daß es sich hierbei um einen Ultrafilter der Menge $\mathbb{N}$ handelt, soll lediglich der Übersichtlichkeit dienen. Da X selbst abzählbar unendlich ist, könnte man ebensogut einen Ultrafilter von X benutzen, was jedoch im nächsten Abschnitt nicht mehr der Fall sein wird. Daß es sich aber um einen primitiven Ultrafilter, also um einen Ultrafilter aus der Klasse H_1 handelt, ist wesentlich. Der nächste Satz zeigt, daß die Benutzung eines Ultrafilters aus einer höheren Klasse auch eine entsprechende Vergrößerung des Index β bewirkt.

3.2 *Die Voraussetzungen über* β *und die Ultrafilterfolge* $(\mathfrak{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *seien dieselben wie in der Definition von* H_β. *Ferner sei* $\mathfrak{u}^*$ *ein Ultrafilter von* $\mathbb{N}$ *aus der Klasse* H_k *mit* $1 \leq k \in \mathbb{N}$. *Dann ist*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{n \in U^*} \mathfrak{v}_n$$

ein Ultrafilter aus $H_{\beta + k - 1}$.

Beweis: Für $k = 1$ ist die Behauptung Inhalt der Definition von H_β, steht also als Induktionsbeginn für alle β zur Verfügung. Es sei jetzt $\mathfrak{u}^*$ aus der Klasse H_{k+1} $(k \geq 1)$. Dann gibt es eine Injektion $\alpha: \mathbb{N} \to \mathfrak{P}_{\mathbb{N}}$ in die Menge der primitiven Ultrafilter von $\mathbb{N}$ und einen Ultrafilter $\mathfrak{u}_1^*$ von $\mathbb{N}$ aus der Klasse H_k mit

$$\mathfrak{u}^* = \bigwedge_{U_1^* \in \mathfrak{u}_1^*} \bigvee_{m \in U_1^*} \alpha(m) .$$

Basismengen von $\mathfrak{u}^*$ sind somit die Mengen der Form

$$U^* = \bigcup_{m \in U_1^*} P_m^*$$

mit $U_1^* \in \mathfrak{u}_1^*$ und $P_m^* \in \alpha(m)$. Basismengen W von $\mathfrak{w}$ besitzen daher die Form

$$W = \bigcup_{n \in U^*} V_n = \bigcup_{m \in U_1^*} \bigcup_{n \in P_m^*} V_n$$

mit Filtermengen $V_n \in \mathfrak{v}_n$. Es folgt

$$(5) \quad \mathfrak{w} = \bigwedge_{U_1^* \in \mathfrak{u}_1^*} \bigvee_{m \in U_1^*} \Big(\bigwedge_{P_m^* \in \mathfrak{p}_m^*} \bigvee_{n \in P_m^*} \mathfrak{v}_n \Big) =$$

$$= \bigwedge_{U_1^* \in \mathfrak{u}_1^*} \bigvee_{m \in U_1^*} \mathfrak{v}'_m \, .$$

Da die Ultrafilter $\mathfrak{v}_n$ eine echt aufsteigende und in $\bigcup\{H_\gamma : \gamma < \beta\}$ unbeschränkte Folge bilden, gilt das Entsprechende für die Ultrafilter

$$\mathfrak{v}'_m = \bigwedge_{P_m^* \in \mathfrak{p}_m^*} \bigvee_{n \in P_m^*} \mathfrak{v}_n$$

bezüglich $\bigcup\{H_\gamma : \gamma < \beta + 1\}$. Anwendung der Induktionsvoraussetzung für den Index k und für $\beta + 1$ statt β liefert wegen (5) unmittelbar $\mathfrak{w} \in H_{\beta+1+k-1} = H_{\beta+k}$. •

Diese beiden Sätze ermöglichen einen groben Überblick über den Aufbau der Klassen H_β.
Hinsichtlich der durch die Präordnung ◀ bestimmten Struktur gliedert sich zunächst H_ω wegen Satz 3.1 in Unterklassen $H_{\omega, n}$, die den Klassen H_n entsprechen. Da es aber in H_ω unbeschränkt absteigende Folgen gibt, müssen die Unterklassen $H_{\omega, n}$ statt mit natürlichen Zahlen auch mit negativen, also ganzzahligen Indizes n versehen werden, wobei es sich jedoch nur um die Ordnungsstruktur handelt, ein Nullpunkt also nicht ausgezeichnet ist. Im Sinn der Präordnung schließen sich dann an H_ω die Klassen $H_{\omega+k}$ ($k \in \mathbb{N}$) an, die wegen Satz 3.2 ebenso wie H_ω strukturiert sind.
Anders verhält sich die Klasse $H_{\omega+\omega} = H_{2\omega}$: Auch sie setzt sich aus Unterklassen $H_{2\omega, n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ zusammen, die aber ihrerseits wie die Klassen $H_{\omega+k}$ wieder in Unterklassen aufspalten. Dieser Prozeß setzt sich entsprechend fort, führt aber sehr rasch zu recht komplizierten Verhältnissen.
An dieser Stelle soll auf eine genauere Beschreibung der Ordnungsstruktur der Klassen H_β verzichtet werden. Es soll vielmehr in einem letzten Abschnitt noch auf die Frage eingegangen werden, ob sich der begonnene Prozeß über das Abzählbare hinaus fortsetzen läßt.

4. Überabzählbare Ultrafilterfolgen

Bei der Definition der Ultrafilterklassen H_β wurde der Index β bisher auf abzählbare Ordinalzahlen eingeschränkt, ein Umstand, der durch den folgenden Gesichtspunkt nahegelegt wird. Schon im ersten Abschnitt wurde entscheidend benutzt, daß die Ultrafilter der jeweiligen Folge ohne Einschränkung der Allgemeinheit als disjunktes System angenommen werden konnten, wodurch die Konstruktion geeigneter Abbildungen zumindest wesentlich erleichtert wurde. Auf der als abzählbar vorausgesetzten Grundmenge X kann aber ein disjunktes Ultrafiltersystem auch nur aus abzählbar vielen Ul-

trafiltern bestehen. Es ist daher nicht zu erwarten, daß sich das bisherige Vorgehen unmittelbar auf überabzählbare Ultrafilterfolgen übertragen läßt.
Nachfolgend bedeute η stets die erste überabzählbare Ordinalzahl, $H = \bigcup\{H_\beta\colon \beta < \eta\}$ sei die Vereinigungsmenge der bisher definierten Ultrafilterklassen, und $(\mathfrak{v}_\beta)_{\beta<\eta}$ sei eine im Sinn der Präordnung ◀ echt aufsteigende Ultrafilterfolge aus H, die in H keine obere Schranke besitzt, was z. B. im Fall $\mathfrak{v}_\beta \in H_\beta$ gewährleistet ist. Wie bisher sei φ^β_γ für $\gamma < \beta < \eta$ eine Abbildung mit $\varphi^\beta_\gamma \mathfrak{v}_\beta = \mathfrak{v}_\gamma$, die dann wegen des echten Aufsteigens der Folge auf $\mathfrak{v}_\beta$ nicht injektiv ist. Schließlich sei noch $\varphi^\beta_\delta = \varphi^\gamma_\delta \circ \varphi^\beta_\gamma$ für $\delta < \gamma < \beta < \eta$ vorausgesetzt. Von einer oberen Schranke $\mathfrak{w}$ der Ultrafilterfolge $(\mathfrak{v}_\beta)$ soll über die Existenz von Abbildungen $\psi_\beta\colon X \to X$ mit $\psi_\beta \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\beta$ hinaus hier auch wieder die Verträglichkeit mit den Abbildungen φ^β_γ gefordert werden, nämlich $\psi_\gamma = \varphi^\beta_\gamma \circ \psi_\beta$ für $\gamma < \beta < \eta$.
In Analogie zu dem bisherigen Vorgehen ist es naheliegend, auch für die überabzählbare Folge $(\mathfrak{v}_\beta)$ eine obere Schranke mit Hilfe eines nur aus überabzählbaren Teilmengen von $I = \{\beta\colon \beta < \eta\}$ bestehenden Ultrafilters $\mathfrak{u}^*$ von I zu gewinnen, indem man den Filter

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\beta \in U^*} \mathfrak{v}_\beta \tag{6}$$

bildet, der wieder ein Ultrafilter von X ist (I, Satz 1.2). Wie bereits erwähnt, können hierbei die Ultrafilter $\mathfrak{v}_\beta$ kein disjunktes System bilden, sondern müssen im Gegenteil sehr stark miteinander verflochten sein. Auch kann der Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ von I jetzt nicht mehr als Ultrafilter von X aufgefaßt werden. Er kann auch nicht als primitiver Ultrafilter gewählt werden, weil primitive Ultrafilter nur auf abzählbar unendlichen Mengen existieren. Über diese Bemerkungen hinaus zeigt nun aber der folgende Satz, daß Ultrafilter der Form (6) keine oberen Schranken der Folge $(\mathfrak{v}_\beta)$ liefern, weil es nämlich überhaupt keine obere Schranke in dem angegebenen Sinn geben kann.

4.1 *Es sei* $\mathfrak{w}$ *ein beliebiger Ultrafilter von* X. *Dann gibt es kein Abbildungssystem* $\{\psi_\beta\colon \beta < \eta\}$ *mit* $\psi_\beta \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\beta$ *und* $\psi_\gamma = \varphi^\beta_\gamma \circ \psi_\beta$ für $\gamma < \beta < \eta$.

Beweis: Der erste Teil des Beweises verläuft in Analogie zum Beweis von Satz 2.4 und wird daher nur kurz skizziert. Durch

$$x \approx y :\Leftrightarrow \psi_\beta x = \psi_\beta y \textit{ für alle } \beta < \eta$$

wird eine Äquivalenzrelation mit dem Quotientenraum $X' = X/{\approx}$ und der kanonischen Abbildung $\kappa^*\colon X \to X'$ definiert. Für alle $\beta < \eta$ gilt $\psi_\beta = \psi^*_\beta \circ \kappa^*$ mit einer geeigneten Abbildung ψ^*_β. Für den Ultrafilter $\mathfrak{w}^* = \kappa^*\mathfrak{w}$ ergibt sich hieraus $\psi^*_\beta \mathfrak{w}^* = (\psi^*_\beta \circ \kappa^*)\mathfrak{w} = \psi_\beta \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\beta$. Und da $\mathfrak{v}_\beta$ ein freier Ultrafilter ist, muß auch $\mathfrak{w}^*$ ein freier Ultrafilter, X' also eine unendliche Menge sein. Die Voraussetzung $\psi_\beta \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\beta$ sichert also, daß X' bijektiv auf X abgebildet werden kann. Mittels einer solchen Bijektion ergibt sich nun die Existenz einer Abbildung $\kappa\colon X \to X$ und für $\beta < \eta$ außerdem von Abbildungen $\psi'_\beta\colon X \to X$ mit $\psi_\beta = \psi'_\beta \circ \kappa$. Weiter gilt mit dem Ultrafilter $\mathfrak{w}' = \kappa\mathfrak{w}$

$$\psi'_\beta \mathfrak{w}' = \mathfrak{v}_\beta \ (\beta < \eta) \quad \textit{und} \quad \psi'_\gamma = \varphi^\beta_\gamma \circ \psi'_\gamma \ (\gamma < \beta < \eta). \tag{7}$$

Außerdem besitzen die Abbildungen ψ'_β wie in 2.4 noch die Eigenschaft

(8) *Aus* $\psi'_\beta x = \psi'_\beta y$ *für alle* $\beta < \eta$ *folgt* $x = y$.

Wegen (7) ergibt Satz 2.1 schließlich

(9) *Aus* $\psi'_\gamma x \neq \psi'_\gamma y$ *folgt* $\psi'_\beta x \neq \psi'_\beta y$ *für alle* β *mit* $\gamma \leq \beta < \eta$.

Im zweiten Teil des Beweises sei nun $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine feste Abzählung. Zu je zwei natürlichen Zahlen m, n mit $m < n$, also mit $x_m \neq x_n$, gibt es dann wegen (8) eine erste Ordinalzahl $\gamma_{m,n} < \eta$ mit

(10) $\psi'_\beta x_m \neq \psi'_\beta x_n$ *für* $\gamma_{m,n} \leq \beta < \eta$.

Da $\Gamma = \{\gamma_{m,n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n\}$ eine abzählbare Menge von Ordinalzahlen $< \eta$ ist, gilt auch $\hat{\gamma} = \sup \Gamma < \eta$. Für alle β mit $\hat{\gamma} \leq \beta < \eta$ folgt nun $\psi'_\beta x_m \neq \psi'_\beta x_n$ für $m \neq n$; d. h. alle diese Abbildungen ψ'_β sind injektiv. Aus $\hat{\gamma} \leq \gamma < \beta < \eta$ folgt daher wegen $\psi'_\gamma = \varphi^\beta_\gamma \circ \psi'_\beta$ auch die Injektivität von φ^β_γ auf $\mathfrak{v}_\beta$, ein Widerspruch zur generellen Voraussetzung. •

Wenn man also erreichen will, daß Filter der Form (6) in dem angegebenen Sinn obere Schranken der überabzählbaren Folge $(\mathfrak{v}_\beta)$ liefern, muß man die Präordnung in geeigneter Weise abändern, indem man etwa an die Stelle von Punktabbildungen spezielle Filterabbildungen treten läßt. Eine Möglichkeit besteht in der Heranziehung von Abbildungsfiltern (vgl. FA, Abschnitt 4).

Definition: *Es sei* σ *ein fester Filter der Menge aller Abbildungen* $X \to X$. *Für einen beliebigen Filter* $\mathfrak{a}$ *von* X *sei dann*

$$\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\Sigma \in \sigma} \; \bigvee_{\varphi \in \Sigma} \varphi(\mathfrak{a}) .$$

$\tilde{\sigma}$ *wird die dem Abbildungsfilter* σ *zugeordnete Filterabbildung genannt, die die Menge aller Filter von* X *in sich abbildet.*

Für Abbildungsfilter und für die ihnen zugeordneten Filterabbildungen wurden (FA, Satz 4.1) folgende Eigenschaften bewiesen, die hier nochmals als Satz formuliert werden.

4.2 (1) $\tilde{\sigma}(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \tilde{\sigma}(\mathfrak{a}) \vee \tilde{\sigma}(\mathfrak{b})$.

(2) *Aus* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *folgt* $\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}) \leq \tilde{\sigma}(\mathfrak{b})$.

(3) $\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$ *ist gleichwertig mit* $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

(4) *Ist* σ *ein Ultrafilter, so ist für jeden Ultrafilter* $\mathfrak{u}$ *von* X *auch* $\tilde{\sigma}(\mathfrak{u})$ *ein Ultrafilter von* X.

Derartige Filterabbildungen sind eine direkte Verallgemeinerung der durch Punktabbildungen induzierten Filterabbildungen: Es sei nämlich $\psi : X \to X$ eine feste Abbildung. Mit dem Hauptfilter $\sigma = \dot{\psi}$ erhält man dann für einen beliebigen Filter $\mathfrak{a}$ von X wegen $\{\psi\} \in \sigma$

$$\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\Sigma \in \sigma} \; \bigvee_{\varphi \in \Sigma} \varphi(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\varphi \in \{\psi\}} \varphi(\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a}) .$$

Über die angegebenen Eigenschaften hinaus wurde in (FA, Satz 4.2) gezeigt, daß mit $\tilde{\sigma}_1$ und $\tilde{\sigma}_2$ auch $\tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}_1$ wieder eine Filterabbildung ist, die einem durch $\tilde{\sigma}_1$ und $\tilde{\sigma}_2$ bestimmten Abbildungsfilter zugeordnet ist. Diese Filterabbildungen können daher zur Definition einer neuen Präordnung benutzt werden, die dann eine Vergröberung der Präordnung $\blacktriangleleft$ darstellt, weil ja Punktabbildungen mit erfaßt werden. Allerdings muß man die hierbei benutzten Filterabbildungen noch geeigneten Einschränkungen unterwerfen, um eine noch immer hinreichend feine Präordnung zu erhalten. Auf die in dieser Weise zu gewinnende weiterführende Klasseneinteilung der Ultrafilter soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden. Hier soll nur gezeigt werden, wie sich mit Hilfe der von Abbildungsfiltern induzierten Filterabbildungen Ultrafilter der Form (6) als obere Schranken der Folge $(\mathfrak{v}_\beta)$ auffassen lassen.
Dazu sei $\alpha < \eta$ eine feste Ordinalzahl. Ordnet man dann in (6) jeder Filtermenge $U^* \in \mathfrak{u}^*$ mit $U^* \subset (\alpha, \eta)$ die Abbildungsmenge

$$\Sigma_{U^*} = \{\varphi_\alpha^\gamma : \gamma \in U^*\}$$

zu, ist $\{\Sigma_{U^*}: U^* \in \mathfrak{u}^* \wedge U^* \subset (\alpha, \eta)\}$ Filterbasis eines Ultrafilters σ_α.

4.3 *Für den Ultrafilter*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\beta \in U^*} \mathfrak{v}_\beta$$

und für alle $\alpha, \beta < \eta$ *mit* $\alpha < \beta$ *gilt*

$$\tilde{\sigma}_\alpha(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}_\alpha \text{ und } \tilde{\sigma}_\alpha = \varphi_\alpha^\beta \circ \tilde{\sigma}_\beta ,$$

wobei hier φ_α^β *als Filterabbildung aufzufassen ist.*

B e w e i s: Es ist

$$\tilde{\sigma}_\alpha(\mathfrak{w}) = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\gamma \in U^*} \Big(\bigwedge_{V^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\beta \in V^*} \varphi_\alpha^\gamma (\mathfrak{v}_\beta)\Big) .$$

Die spezielle Wahl $\gamma = \beta \in U^* \cap V^*$ ergibt wegen $\varphi_\alpha^\beta \mathfrak{v}_\beta = \mathfrak{v}_\alpha$ unmittelbar $\tilde{\sigma}_\alpha(\mathfrak{w}) \geq \mathfrak{v}_\alpha$. Da aber σ_α und $\mathfrak{w}$ Ultrafilter sind, muß nach Satz 4.2(4) auch $\tilde{\sigma}_\alpha(\mathfrak{w})$ ein Ultrafilter sein, weswegen sogar $\tilde{\sigma}_\alpha(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}_\alpha$ gilt. Die zweite Behauptung ergibt sich sofort aus der Definition der Filterabbildungen: Für einen beliebigen Filter $\mathfrak{a}$ von X erhält man (es werden nur $U^* \in \mathfrak{u}^*$ mit $U^* \subset (\beta, \eta)$ berücksichtigt)

$$\varphi_\alpha^\beta \circ \tilde{\sigma}_\beta(\mathfrak{a}) = \varphi_\alpha^\beta \Big(\bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\gamma \in U^*} \varphi_\beta^\gamma (\mathfrak{a})\Big) =$$

$$= \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\gamma \in U^*} (\varphi_\alpha^\beta \circ \varphi_\beta^\gamma)\, \mathfrak{a} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \ \bigvee_{\gamma \in U^*} \varphi_\alpha^\gamma (\mathfrak{a}) = \tilde{\sigma}_\alpha(\mathfrak{a})$$

und daher $\varphi_\alpha^\beta \circ \tilde{\sigma}_\beta = \tilde{\sigma}_\alpha$. •

Abschließend sollen nun noch zwei Fragen behandelt werden, die im Zusammenhang mit der Darstellung (6) von Ultrafiltern $\mathfrak{w}$, also

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{\beta \in U^*} \mathfrak{v}_\beta ,$$

stehen. Bei gegebener Folge $(\mathfrak{v}_\beta)$ hängt $\mathfrak{w}$ noch entscheidend von der Wahl des Ultrafilters $\mathfrak{u}^*$ der Indexmenge $I = \{\beta : \beta < \eta\}$ ab. Dabei ist es keineswegs so, daß verschiedene Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ auch verschiedene Ultrafilter $\mathfrak{w}$ bestimmen. Es erhebt sich also die Frage, welche Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ denselben Ultrafilter $\mathfrak{w}$ erzeugen. Darüber hinaus ist es möglich, auf die Voraussetzung, daß $\mathfrak{u}^*$ ein Ultrafilter ist, zu verzichten, ohne daß dabei die Ultrafiltereigenschaft von $\mathfrak{w}$ verlorengeht. Man wird daher zweitens an der Kennzeichnung derartiger Filter von I interessiert sein.
Bei der Behandlung der angeschnittenen Fragen kann auf die Bindung an eine feste Folge $(\mathfrak{v}_\beta)$ verzichtet werden. An ihre Stelle soll eine beliebige (unendliche) Menge $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{v}_\iota : \iota \in I\}$ verschiedener Ultrafilter treten, wobei die Indexmenge I nicht notwendig überabzählbar sein muß, so daß auch der Fall abzählbarer Folgen mit erfaßt wird.

Definition: *Eine Teilmenge* M^* *von* I *soll abgeschlossen heißen, wenn für alle* $\kappa \in I$ *aus*

$$\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee_{\iota \in M^*} \mathfrak{v}_\iota$$

stets $\kappa \in M^*$ *folgt.*

Der nächste Satz zeigt, daß dieser Abgeschlossenheitsbegriff die üblichen Eigenschaften besitzt und somit auf der Indexmenge I eine Topologie bestimmt.

4.4 $\emptyset$ *und* I *sind abgeschlossen.*
Mit M_1^* *und* M_2^* *ist auch* $M_1^* \cup M_2^*$ *abgeschlossen.*
Der Durchschmitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar. Sind M_1^* und M_2^* abgeschlossen und gilt

$$\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee_{\iota \in M_1^* \cup M_2^*} \mathfrak{v}_\iota ,$$

so folgt zunächst ($\mathfrak{v}_\kappa$ ist Ultrafilter)

$$\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee_{\iota \in M_1^*} \mathfrak{v}_\iota \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee_{\iota \in M_2^*} \mathfrak{v}_\iota .$$

Im ersten Fall erhält man $\kappa \in M_1^*$, im zweiten $\kappa \in M_2^*$, in jedem Fall also $\kappa \in M_1^* \cup M_2^*$, weswegen $M_1^* \cup M_2^*$ ebenfalls abgeschlossen ist. Schließlich seien die Mengen M_λ^* mit λ aus einer beliebigen Indexmenge Λ abgeschlossen. Aus

$$\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee_{\iota \in \bigcap M_\lambda^*} \mathfrak{v}_\iota$$

folgt dann

$$\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee_{\iota \in M^*_\lambda} \mathfrak{v}_\iota \text{ } \textit{für alle } \lambda \in \Lambda,$$

also $\kappa \in M^*_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und damit $\kappa \in \bigcap \{M^*_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. •

Bezüglich der auf I durch diesen Abgeschlossenheitsbegriff definierten Topologie ist jetzt auch der Begriff der offen-abgeschlossenen Menge (kurz: o-a-Menge) erklärt.

Definition: M^* *heißt o-a-Menge, wenn* M^* *und* $I \setminus M^*$ *abgeschlossen sind.*
Ein Filter $\mathfrak{a}^*$ *von* I *heißt o-a-Filter, wenn er eine aus o-a-Mengen bestehende Filterbasis besitzt.*
$\mathfrak{a}^*$ *heißt ultra-o-a-Filter, wenn* $\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{o}$ *gilt,* $\mathfrak{a}^*$ *ein o-a-Filter ist und wenn für alle o-a-Filter* $\mathfrak{b}^*$ *aus* $\mathfrak{o} < \mathfrak{b}^* \leq \mathfrak{a}^*$ *stets* $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{a}^*$ *folgt.*

4.5 *Es sei* $\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{o}$ *ein o-a-Filter:* $\mathfrak{a}^*$ *ist genau dann ein ultra-o-a-Filter, wenn für alle o-a-Teilmengen* M^* *von* I *entweder* $M^* \in \mathfrak{a}^*$ *oder aber* $I \setminus M^* \in \mathfrak{a}^*$ *gilt.*

Beweis: Zunächst sei $\mathfrak{a}^*$ ein ultra-o-a-Filter, und M^* sei eine o-a-Menge. Setzt man zusätzlich $I \setminus M^* \notin \mathfrak{a}^*$ voraus, so folgt $\mathfrak{a}^* \wedge \overset{\frown}{M}{}^* \neq \mathfrak{o}$. Und da $\mathfrak{a}^* \wedge \overset{\frown}{M}{}^*$ selbst ein o-a-Filter $\leq \mathfrak{a}^*$ ist, muß sogar $\mathfrak{a}^* \wedge \overset{\frown}{M}{}^* = \mathfrak{a}^*$, also $M^* \in \mathfrak{a}^*$, erfüllt sein. Wegen $\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{o}$ können die Fälle $M^* \in \mathfrak{a}^*$ und $I \setminus M^* \in \mathfrak{a}^*$ auch nicht gleichzeitig eintreten.
Zum Beweis der Umkehrung sei $\mathfrak{a}^*$ ein o-a-Filter, aber kein ultra-o-a-Filter. Dann gibt es einen o-a-Filter $\mathfrak{b}^*$ mit $\mathfrak{o} < \mathfrak{b}^* < \mathfrak{a}^*$ und daher eine o-a-Filtermenge $B^* \in \mathfrak{b}^*$ mit $B^* \notin \mathfrak{a}^*$. Wegen $\mathfrak{a}^* \wedge \overset{\frown}{B}{}^* \geq \mathfrak{b}^* > \mathfrak{o}$ gilt außerdem aber auch $I \setminus B^* \notin \mathfrak{a}^*$. •

Der folgende Satz zeigt nun, daß die ultra-o-a-Filter der Indexmenge I genau die jeweils gröbsten Filter sind, die mit Hilfe der Ultrafiltermenge $\mathfrak{V}$ wieder einen Ultrafilter erzeugen.

4.6 (1) *Es sei* $\mathfrak{a}^*$ *ein ultra-o-a-Filter von* I. *Dann ist*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{A^* \in \mathfrak{a}^*} \bigvee_{\iota \in A^*} \mathfrak{v}_\iota$$

ein Ultrafilter von X.

(2) *Es sei* $\mathfrak{w}$ *ein Ultrafilter von* X *mit* $\mathfrak{w} \leq \bigvee\{\mathfrak{v}_\iota : \iota \in I\}$, *und für jede Filtermenge* $W \in \mathfrak{w}$ *sei* $A^*_W = \{\iota : \iota \in I \wedge W \in \mathfrak{v}_\iota\}$. *Dann ist* $\{A^*_W : W \in \mathfrak{w}\}$ *Filterbasis eines ultra-o-a-Filters* $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ *mit*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{A^* \in \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}} \bigvee_{\iota \in A^*} \mathfrak{v}_\iota .$$

(3) *Es sei* $\mathfrak{w}$ *ein Ultrafilter von* X *und* $\mathfrak{b}^* \neq \mathfrak{o}$ *ein Filter von* I *mit*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{B^* \in \mathfrak{b}^*} \bigvee_{\iota \in B^*} \mathfrak{v}_\iota .$$

Dann gilt $\mathfrak{b}^* \leq \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$, *und* $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ *ist genau dann erfüllt, wenn* $\mathfrak{b}^*$ *ein o-a-Filter und damit selbst ein ultra-o-a-Filter ist.*

Beweis: (1) Jedenfalls ist $\mathfrak{w}$ ein Filter von X mit $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{o}$. Für eine beliebig gegebene Teilmenge M von X sei $M^* = \{\iota: \iota \in I \wedge M \in \mathfrak{v}_\iota\}$. Aus $\kappa \in I$ und $\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee\{\mathfrak{v}_\iota: \iota \in M^*\}$ folgt wegen der Definition von M^* zunächst $M \in \mathfrak{v}_\kappa$ und daher dann weiter $\kappa \in M^*$. Die Menge M^* ist also abgeschlossen. Wegen

$$I \backslash M^* = \{\iota: \iota \in I \wedge M \notin \mathfrak{v}_\iota\} = \{\iota: \iota \in I \wedge X \backslash M \in \mathfrak{v}_\iota\}$$

zeigt dieselbe Überlegung, daß auch $I \backslash M^*$ abgeschlossen, M^* selbst also eine o-a-Menge ist. Wegen Satz 4.5 muß daher $M^* \in \mathfrak{a}^*$ oder $I \backslash M^* \in \mathfrak{a}^*$ erfüllt sein. Im ersten Fall ergibt sich

$$\mathfrak{w} \leq \bigvee_{\iota \in M^*} \mathfrak{v}_\iota \leq \overset{\frown}{M}$$

und daher $M \in \mathfrak{w}$. Im zweiten Fall folgt analog $X \backslash M \in \mathfrak{w}$. Daher ist $\mathfrak{w}$ sogar ein Ultrafilter.

(2) Für die Mengen A^*_W mit $W \in \mathfrak{w}$ gilt wegen der Voraussetzung $A^*_W \neq \emptyset$, und außerdem ergibt sich unmittelbar $A^*_W \cap A^*_{W'} = A^*_{W \cap W'}$. Daher ist $\{A^*_W: W \in \mathfrak{w}\}$ Basis eines Filters $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}} \neq \mathfrak{o}$. Aus $\kappa \in I$ und $\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee\{\mathfrak{v}_\iota: \iota \in A^*_W\}$ folgt $W \in \mathfrak{v}_\kappa$ und damit $\kappa \in A^*_W$; d.h. A^*_W ist abgeschlossen. Ebenso hat $\mathfrak{v}_\kappa \leq \bigvee\{\mathfrak{v}_\iota: \iota \in I \backslash A^*_W\}$ auch $X \backslash W \in \mathfrak{v}_\kappa$, also $\kappa \in I \backslash A^*_W$ zur Folge und damit die Abgeschlossenheit von $I \backslash A^*_W$. Somit ist A^*_W eine o-a-Menge, und $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ ist daher ein o-a-Filter. Zum Nachweis, daß $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ sogar ein ultra-o-a-Filter ist, sei M^* eine beliebige o-a-Menge. Dann gilt

$$\bigvee_{\iota \in M^*} \mathfrak{v}_\iota \wedge \bigvee_{\kappa \in I \backslash M^*} \mathfrak{v}_\kappa = \mathfrak{o}$$

und außerdem

$$\mathfrak{w} \leq \bigvee_{\iota \in I} \mathfrak{v}_\iota = \bigvee_{\iota \in M^*} \mathfrak{v}_\iota \vee \bigvee_{\kappa \in I \backslash M^*} \mathfrak{v}_\kappa .$$

Da $\mathfrak{w}$ ein Ultrafilter ist, folgt

$$\mathfrak{w} \leq \bigvee_{\iota \in M^*} \mathfrak{v}_\iota \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{w} \leq \bigvee_{\kappa \in I \backslash M^*} \mathfrak{v}_\kappa .$$

Im ersten Fall ergibt sich $M^* \in \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ und im zweiten Fall entsprechend $I \backslash M^* \in \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$. Wegen Satz 4.5 ist $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ daher ein ultra-o-a-Filter. Schließlich erhält man

$$\mathfrak{o} < \mathfrak{w} \leq \bigwedge_{A^* \in \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}} \bigvee_{\iota \in A^*} \mathfrak{v}_\iota .$$

Da hier die rechte Seite wegen (1) ein Ultrafilter ist, gilt sogar die behauptete Gleichheit.

(3) Zu jedem $W \in \mathfrak{w}$ existiert eine Filtermenge $B^* \in \mathfrak{b}^*$ mit

$$\bigvee_{\iota \in B^*} \mathfrak{v}_\iota \leq \hat{W}.$$

Hieraus folgt $B^* \subset A^*_W$ und damit $\mathfrak{b}^* \leq \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$. Ist $\mathfrak{b}^*$ selbst ein o-a-Filter, so muß sogar $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ erfüllt sein, weil $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$ ein ultra-o-a-Filter ist. Dasselbe gilt dann auch für $\mathfrak{b}^*$. •

Aus dem letzten Teil des Satzes folgt insbesondere, daß zwei verschiedene ultra-o-a-Filter $\mathfrak{a}^*_1$ und $\mathfrak{a}^*_2$ im Sinn von (1) auch verschiedene Ultrafilter $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ bestimmen. Und die einen Ultrafilter $\mathfrak{w}$ erzeugenden Filter von I sind genau die Filter $\mathfrak{b}^*$ mit $\mathfrak{v} < \mathfrak{b}^* \leq \mathfrak{a}^*_{\mathfrak{w}}$.